論　文

数学的研究の動機とその具体例

柱　貴裕

Takahiro HASHIRA

要旨

一般に，理系の「研究」と聞くと，顕微鏡やフラスコなどの実験道具を用いて対象にある外的要因を加える実験・試行を重ね，その結果を考察することを想像するであろう．このようなイメージの下であると，「数学の研究」の方法はいかなるものかという疑問が出てくる．極端に言えば，数学は紙とペンさえあれば成立してしまうほど抽象的な学問であるが，その中に奥深さが存在している．また，先に証明されている定理 (先行研究) を組み合わせていけばよいものではなく，時にひらめきを必要とする点が特徴であろう．本稿は，高等学校で学習する数学 (数学 III まで) を習得した者に，数学の研究とはどのようなものなのか，そして無限に広がっていく数学の世界を知ってもらうことが目的である．筆者が大学院修士課程の 2 年間 (2016 年 4 月～2018 年 3 月) で研究した内容，そしてそれをまとめた論文 [**5**] を元に，厳密な議論をなるべく省いた上で主定理の証明までを述べていく．高等学校で学習する数学の範囲から逸脱する部分については，主に第 1 章で述べる．数学的な内容を理解してもらうことよりも，数学の研究の仕方や動機を知ってもらうことが目的であることを強調しておく．

本研究は，次の退化型拡散項をもつ走化性方程式の初期値境界値問題を考える:

$$
\text{(KS)}\qquad
\begin{cases}
\dfrac{\partial u}{\partial t} = \nabla\cdot(D(u)\nabla u) - \nabla\cdot(S(u)\nabla v), & x\in\Omega,\ t>0,\\[2mm]
\dfrac{\partial v}{\partial t} = \Delta v - v + u, & x\in\Omega,\ t>0,\\[2mm]
D(u)\dfrac{\partial u}{\partial \nu} = \dfrac{\partial v}{\partial \nu} = 0, & x\in\partial\Omega,\ t>0,\\[2mm]
u(x,0)=u_0(x),\ v(x,0)=v_0(x), & x\in\Omega.
\end{cases}
$$

ここで，$D(u)=mu^{m-1}, S(u)=u^{q-1}$ であり，u, v を値が常に 0 以上の未知関数とする．

問題 (KS) で $D(u)=1, S(u)=u$ のときは 1970 年に Keller–Segel [**13**] によって，$D(u), S(u)$ が一般の関数のとき 2009 年に Hillen–Painter [**7**] によって提唱された問題である．特に $m>1$ (退化型方程式) の場合, 拡散項 $\nabla\cdot(D(u)\nabla u)=\Delta u^m$ の係数は $D(0)=0$ を満たすことから, 生物がいない場所での拡散現象が起こらないことを表している．この問題に対して, 与えられた初期状態 (数学的には初期値) から生物がどのように移動するか, 特に, 生物が拡散するか, または集中するかを解明することがこの分野における大き

はしらたかひろ：数学科教諭

キーワード：走化性方程式，解の爆発

な研究課題である．ここで, 生物学における集中現象は数学的には解の爆発として特徴付けられる．本研究における解の爆発とは, 解 (u,v) がある $T \in (0,\infty]$ に対して

$$\limsup_{t\to T} \|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\Omega)} = \infty^{*1}$$

を満たすことである．ここで，$D(u)=1, S(u)=u$, すなわち minimal model のとき，問題 (KS) について (空間 3 次元以上のとき)，次の (a), (b) のような性質があることが知られている:

(a) 初期値が小さいとき，解 (u,v) は時間大域的に存在し有界である (Tao–Winkler [**21**], Cao [**1**]).

(b) u が有限時刻で爆発する解 (u,v) を与える初期値が存在する (Winkler [**22**]).

ここで, (a), (b) のどちらか一方が必ず成り立つわけではない (二者択一でない) ことに注意する．

本研究では, 有限時刻で爆発する (KS) の解の存在について考える．一般に, 退化型方程式の解の滑らかさは期待できないが, 問題 (KS) で第一方程式を非退化型方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nabla\cdot(\nabla(u+\varepsilon)^m - (u+\varepsilon)^{q-2}u\nabla v) \quad (\varepsilon > 0)$$

(すなわち $D(u)=m(u+\varepsilon)^{m-1}, S(u)=(u+\varepsilon)^{q-2}u$) に置き換えた問題 $(\mathrm{KS})_\varepsilon$ は, 狭義に正値で滑らかな解をもつため比較的扱いやすい．また，数学的な面では $S(u)\ge \varepsilon^{q-2}u$ が成り立っていることが扱いやすくなっている要因になっている (第 2 章でこれについて触れる*2)．そのため, これまでの研究では, 非退化型の問題 $(\mathrm{KS})_\varepsilon$ と退化型の問題 (KS) について以下の結果が得られている:

(i) $q > m + \frac{2}{N}$ のとき, 有限時刻で爆発する $(\mathrm{KS})_\varepsilon$ の解を与える初期値の存在 (Cieślak–Stinner[**2**]).

(ii) $q > m + \frac{2}{N}$ のとき, 有限時刻または無限時刻で爆発する (KS) の解*3を与える初期値の存在 (Ishida–Yokota [**11**]).

以上の (i), (ii) を比較すると, 退化型の問題 (KS) においては, 解の爆発時刻が有限か無限かが明らかになっていないという，研究結果にずれが生じている．すなわち，問題 (KS) の解のうち，有限時刻で爆発するものが存在する保証がないのである．本研究では, 非退化型の場合の [**2**] の方法を改良し, [**11**] では得られていない有限時刻で爆発する (KS) の解を与える初期値が満たすべき十分条件を与えた．

---

*1 $\limsup_{t\to T}\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\Omega)} := \lim_{t\to T}\sup_{t\le s\le T}\|u(\cdot,s)\|_{L^\infty(\Omega)}$ と定める．sup とは上限を表す．最大値のようなものと理解してよい．

*2 補題 2.4 の後の記述で詳しく述べている．

*3 退化型方程式の解は一般に**弱解**と呼ばれるが，ここでは区別せずに解という．

1. 準備

この章では，この研究をするうえで必要である最低限の定義を述べる．

1.1. 導関数と偏導関数

高等学校で使用される教科書 [**14**] には，微分係数と導関数は次のように定義されている．

定義 1.1. 関数 $f(x)$ について，極限値

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

が存在するとき，この値を $f(x)$ の $x=a$ における**微分係数**といい，$f'(a)$ と表す．またこのとき，$f(x)$ は $x=a$ で**微分可能である**という．

定義 1.2. 関数 $f(x)$ が区間 I に属するすべての値 a において微分可能のとき，値 a に $f'(a)$ を対応させる関数を $f(x)$ の**導関数**といい，$f'(x)$ と表す．

これらの定義は，関数 $f(x)$ が**一つの変数** x **に対し，実数** $f(x)$ **を対応させる**ものに対してのものである．しかし，自然現象等を考える際，様々な要因 (変数) によって一つの状況 (値) が得られることがほとんどである．

例　(1) $f(x,y)=x^2+y-2$ は，2 つの変数の組 (x,y) が一つ定まると，値が一つ定まる関数である．

　　(2) $f(x_1,x_2,...,x_N)=x_1x_2\times\cdots\times x_N$ は，N 個の変数の組 $(x_1,x_2,...,x_N)$ が一つ定まると，値が一つ定まる関数である．

このように，2 つ以上の変数を持つ関数を**多変数関数**といい，変数が 1 つの関数は**一変数関数**という．

多変数関数に対しての微分を考える．多変数関数については，1 つの変数にのみ着目した微分を考える．

定義 1.3. 二変数関数 $f(x,y)$ について，極限値

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h,b)-f(a,b)}{h}$$

が存在するとき，この値を $f(x,y)$ の $(x,y)=(a,b)$ における x **方向の偏微分係数**といい，$f_x(a,b)$ または $\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)$ と表す．またこのとき，$f(x,y)$ は $(x,y)=(a,b)$ で x **方向に偏微分可能である**という．また，関数 $f(x,y)$ が領域 Ω に属するすべての (a,b) において x 方向に偏微分可能のとき，(a,b) に $f_x(a,b)$ を対応させる関数を $f(x,y)$ の x **方向の偏導関数**といい，$f_x(x,y)$ などと表す．

本研究で扱う関数 u,v は，$x_1,x_2,...,x_N,t$ を変数とする $(N+1)$ 変数関数である．しかし，$x=(x_1,...,x_N)$ と t の 2 つの変数[*1] [*2]としてみなすことが多い．また，解析学によく現れる微分の記号 (微分作用素) ∇, Δ

[*1] 変数 x を空間，変数 t を時間方向の変数と呼ぶこともある．

[*2] 変数 $x=(x_1,...,x_N)$ は，N 個の成分 $x_1,...,x_N$ からなる．このような変数を N 次元の変数という．

について，以下のように定義する:

$$\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_N}\right),\ \Delta u = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}.$$

ここで $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial}{\partial x_N}\right)$ というベクトルとみれば，$\nabla \cdot \nabla u = \Delta u$ となる[*1].

1.2. L^p 空間と Sobolev 空間

解析学で最も重要であるのが次で定める L^p 空間である．以下，$x = (x_1, ..., x_N)$ を表し，$\int_\Omega$ は領域 Ω 上での積分を表すとする．

定義 1.4. $1 \leq p < \infty$ のとき，

$$L^p(\Omega) := \left\{ f : \int_\Omega |f(x)|^p \, dx < \infty \right\}$$

を L^p 空間という．この空間には

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} := \left(\int_\Omega |f(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

というノルム[*2] が定められている．

$p = \infty$ のとき，

$$L^\infty(\Omega) := \left\{ f : \max_{x \in \Omega} |f(x)| < \infty \right\}$$

を L^∞ 空間[*3]という．この空間には

$$\|f\|_{L^\infty(\Omega)} := \max_{x \in \Omega} |f(x)|$$

というノルム[*4]が定められている．

このように，L^p 空間のような関数を要素にもつ空間を関数空間といい，微分方程式をはじめとする解析学ではなくてはならない概念である．例えば，2 変数の関数 $u(x,t)$ を，t から $u(t)\,(x) := u(x,t)$ という関数を値にとる関数としてみることで，L^p 空間における性質を用いて議論を進めることができる．ここで注意しなければならないのは，L^p 空間に属する関数は**連続であるとは限らない**ことである．たとえば，区間 $[-1, 1]$ 上で定義された関数 $f(x) = \frac{|x|}{x}\,(x \neq 0),\ 1\,(x = 0)$ は，$-1 \leq x < 0$ では -1 を値にとり，$0 \leq x \leq 1$ では 1 を値にとる．もちろん f は $x = 0$ で不連続となるが，任意の p に対する L^p 空間に属する．このような関数に対して，微分を定義しなければならないが，一般に連続関数でなければ微分することができない．ここで，L^p 空間に属する関数に対して，次のような**弱微分**を定める:

[*1] $\nabla, \nabla u$ はベクトルであるので，$\cdot$ はベクトルの内積を表す．

[*2] ノルムとは，実数における絶対値のようなものである．$f, g \in L^p(\Omega)$ に対し，$d(f,g) = \|g - f\|_{L^p(\Omega)}$ は距離関数となり，$L^p(\Omega)$ はこの距離で定められた位相に関して完備である．つまり L^p 空間は Banach 空間である．

[*3] 厳密には，関数 f は連続でないものも扱うため，$L^\infty(\Omega) := \{f :$ ある $M > 0$ があって，Ω 上ほとんどいたるところ $|f(x)| \leq M\}$ と定める．

[*4] 厳密には $\|f\|_{L^\infty(\Omega)} := \inf\{M \geq 0 : \Omega$ 上ほとんどいたるところ $|f(x)| \leq M\}$ と定める．

定義 1.5. $1 \le p \le \infty$ のとき，

$$W^{1,p}(\Omega) := \left\{ f \in L^p(\Omega) : \exists g \in L^p(\Omega) \text{ s.t.}, \int_\Omega f\varphi_{x_i} = -\int_\Omega g_i\varphi,\ \forall\varphi \in C_c^\infty(\Omega), 1 \le i \le N \right\}$$

を Sobolev (ソボレフ) 空間という．ここで，$C_c^\infty(\Omega) = \{\varphi : \varphi$ は無限回微分可能で $\varphi(x) = 0,\ x \in \partial\Omega\}$ [*1] であり，この g_i を $g_i = f_{x_i}$ と表し，f の x_i **方向の弱偏導関数**という．この空間には

$$\|f\|_{W^{1,p}(\Omega)} := \|f\|_{L^p(\Omega)} + \sum_{i=1}^N \|f_{x_i}\|_{L^p(\Omega)}$$

というノルムが定められている．

定義が複雑な形をしているが, イメージとして Sobolev 空間は L^p **空間に属する関数の微分も** L^p **空間に属するものの集まり**として理解するといいだろう．特に，$g_i = f_{x_i}$ と表記することから，$\int_\Omega f\varphi_{x_i} = -\int_\Omega f_{x_i}\varphi$ という等式が成り立つが，右辺の f にある微分が右辺では φ の微分に移っていることが分かる．すなわち，微分を φ に押し付けて定義している点が数学的には重要なのである．また，空間 1 次元の区間 $[a, b]$ で考えれば，$\varphi \in C_c^\infty([a, b])$ は $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$ を満たす．よって，$f \in W^{1,p}(a, b)$[*2] に対して，

$$\int_a^b f(x)\varphi'(x)\,dx = \Big[f(x)\varphi(x)\Big]_a^b - \int_a^b f'(x)\varphi(x)\,dx = -\int_a^b f'(x)\varphi(x)\,dx$$

となり，部分積分の公式そのものである．また，弱微分についても，通常の微分と同じような合成関数の微分の公式，積・商の微分の公式は同様に成り立つ．

2. 主定理とその証明

この章では，いよいよ本研究の核を述べる．

2.1. 先行研究と本研究の動機

本研究では，走化性方程式と呼ばれる連立の偏微分方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nabla \cdot (D(u)\nabla u) - \nabla \cdot (S(u)\nabla v), \qquad x \in \Omega,\ t > 0, \tag{1}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \Delta v - v + u, \qquad x \in \Omega,\ t > 0 \tag{2}$$

を Neumann (ノイマン) 境界条件

$$D(u)\frac{\partial u}{\partial \nu} = \frac{\partial v}{\partial \nu} = 0, \qquad x \in \partial\Omega,\ t > 0 \tag{3}$$

と初期条件

$$u(x, 0) = u_0(x),\ v(x, 0) = v_0(x), \qquad x \in \Omega \tag{4}$$

[*1] ここで $\partial\Omega$ は領域 Ω の境界を表す．例えば区間 $(0, 1)$ に対して $\partial(0, 1) = \{0, 1\}$.

[*2] 空間 1 次元のときは特に $L^p([a, b])$ と表記することはない．端点 $x = a, b$ における値は積分には役割が一切ないからである．

の下で考える.

(1), (2) は, ある化学物質 (濃度 v) に引き寄せられる走化性という性質をもつ生物 (密度 u) の運動を記述した数理モデルである. (1), (2) において，各項は次のような現象を表現している:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \underbrace{\nabla \cdot (D(u)\nabla u)}_{\text{拡散}} \underbrace{-\nabla \cdot (S(u)\nabla v)}_{\text{集中}},$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \underbrace{\Delta v}_{\text{拡散}} \underbrace{-v}_{\text{消費}} \underbrace{+u}_{\text{生産}}.$$

本研究では $D(u) = mu^{m-1}, S(u) = u^{q-1}$ とする. ここで，合成関数の微分の公式より，拡散項は $\nabla \cdot (mu^{m-1}\nabla u) = \nabla \cdot \nabla u^m = \Delta u^m$ となる. また，境界条件とは対象の領域の境界 (端) での条件を表しており，Neumann 境界条件 (3) は，領域外への流出や，領域内への流入がないことを表している. ここで，ν は領域 Ω の境界 $\partial\Omega$ についての外向きの単位法線ベクトルとし，$\frac{\partial}{\partial \nu}$ は ν 方向の偏微分を表す. 初期条件 (4) は，観測を始めた時刻の状態，すなわち u, v の初期状態がそれぞれ関数 u_0, v_0 であることを表している.

上記の (1) から (4) を連立させた，走化性方程式系の初期値境界値問題 (KS) の解の挙動について考える:

$$\text{(KS)} \quad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \Delta u^m - \nabla \cdot (u^{q-1}\nabla v), & x \in \Omega,\ t > 0, \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} = \Delta v - v + u, & x \in \Omega,\ t > 0, \\ \dfrac{\partial u^m}{\partial \nu} = \dfrac{\partial v}{\partial \nu} = 0, & x \in \partial\Omega,\ t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x),\ v(x,0) = v_0(x), & x \in \Omega. \end{cases}$$

ここで，u, v は変数 x, t の実数値の未知関数，$\Omega = B_R := \{x \in \mathbb{R}^N \,|\, |x| < R\}\,(R > 0, N \geq 2)$ とし，定数 m, q は $m \geq 1, q \geq 2$ を満たすものとする.

この問題の解 $u(x,t), v(x,t)$ は，位置 x, 時刻 t における生物 (細胞性粘菌) の密度，化学物質の濃度をそれぞれ表している. 密度と濃度は 0 以上の値を考えるため，u, v は非負値 (0 以上の値) をとる. また，$m > 1$ のとき，問題 (KS) の第 1 式に現れる Δu^m は "退化型" 拡散項と呼ばれる. 退化型の拡散項は，$u = 0$ における拡散の作用が消滅することを表しており，生物がいない場所での拡散現象が起こらないことを表している. つまり，一般的な線形拡散項 Δu よりも，より現実的なものであると考えられる. 1970 年，Keller–Segel [**13**] によって，$m = 1, q = 2$ の場合の問題 (KS) が提唱された. その後，2009 年に Hillen–Painter [**7**] によって，m, q が任意の実数の場合の問題に拡張され，近年，特に盛んに研究されている問題である. また，数学的な研究のモチベーションは，初期状態や方程式にある定数の条件から，t を大きくしたときに解 u, v (主に u) がどうふるまっていくのか (解の挙動) を解明することにある. すなわち，時刻 $t = 0$ における条件から，未来にどのような現象が起こるのかを数学的に予測することが目的である. ここで，生物のはたらきの中で，散らばっていく力の方が強い場合，その密度 u は常に有限の値をとるであろう. よって，解は時間大域的に存在して有界となる. 一方，生物が集中のはたらきを強く持つならば,

生物が一点に集中し，その密度 u は，その点の近くで限りなく大きくなる．つまり，u の最大値が限りなく大きくなる．よって解 u は爆発という現象を起こす．また，拡散項の指数 m と凝縮 (集中) 項の指数 q はそれぞれの強さを表していると考えてよいであろう．ここで，解が時間大域的に存在して有界であるとは，次を満たす定数 C が存在することをいう:

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\Omega)} + \|v(\cdot,t)\|_{L^\infty(\Omega)} \le C, \quad t \in (0,\infty)^{*1}.$$

一方で，解 u が爆発するとは, 次を満たす $T \in (0,\infty]$ が存在することをいう:

$$\limsup_{t\to T} \|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\Omega)} = \infty.$$

また，T を u の爆発時刻という．

まず，$m=1, q=2$ のときの先行研究を，空間の次元 N の大きさによって述べる．

- (Osaki–Yagi [**19**])
  $N=1$ のとき，どんな初期値に対しても解は時間大域的に存在し有界である．
- $N=2$ のとき，次の (a), (b) を満たす正の定数 M_c が存在する．
  (a) (Nagai–Senba–Yoshida [**18**], Nagai–Ogawa [**17**])
  $\int_\Omega u_0(x)\,dx < M_c$ ならば，解は時間大域的に存在し有界である．
  (b) (Herrero–Velázquez [**6**], Horstmann–Wang [**8**], Mizoguchi–Winkler [**16**])
  $\int_\Omega u_0(x)\,dx > M_c$ で，$u(x,t)$ が有限時刻で爆発する初期値が存在する．
- (Winkler [**22**])
  $N \ge 3$ のとき，すべての $M>0$ に対して，$\int_\Omega u_0(x)\,dx = M$ を満たし，$u(x,t)$ が有限時刻で爆発する初期値が存在する．

$m=1, q=2$ の場合の問題 (KS) の解は，空間 2 次元を境に解の挙動が大きく変わることが分かる．

次に，問題 (KS) の第 1 式を

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nabla\cdot(\nabla(u+\varepsilon)^m - (u+\varepsilon)^{q-2}u\nabla v) \quad (\varepsilon > 0)$$

に置き換えた問題 $(\mathrm{KS})_\varepsilon$ に対する先行研究を述べる．

- (Tao–Winkler [**21**], Ishida–Seki–Yokota [**9**], Senba–Suzuki [**20**])
  $q < m + \frac{2}{N}$ のとき，どんな初期値に対しても解は時間大域的に存在し有界である．
- (Cieślak–Stinner [**2, 3**])
  $q > m + \frac{2}{N}$ のとき，$u(x,t)$ が有限時刻で爆発する初期値が存在する．

以上より，$q = m + \frac{2}{N}$ を境に，解の挙動が大きく変わる．前述の $m=1, q=2$ のときと比べると，確かに $N=2$ のとき $q = m + \frac{2}{N}$ を満たしている．したがって，自然な一般化になっていることが分かる．また，

*1 $f(x)$ を簡潔に f と表現することと同様に，$u(x,t)$ を x の関数として簡潔に表すときには，$u(\cdot,t)$ と表すことがある．

拡散の指数 m と集中の指数 q について，m が q より十分に小さければ u が爆発するという結果になっている．これは，「拡散の力が集中の力より十分に小さければ，時間が経てば生物は集中していく」という，自然に考えられる結果が出てきている．また，問題 (KS) についても同様の結果が得られることが期待できる．

最後に，問題 (KS) の先行研究を紹介する．

- (Ishida–Yokota [**10, 12**], Ishida–Seki–Yokota [**9**], Mimura [**15**])
  $q < m + \frac{2}{N}$ のとき，どんな初期値に対しても解は時間大域的に存在し有界である．
- (Ishida–Yokota [**11**]))
  $q > m + \frac{2}{N}$ のとき，$u(x,t)$ が有限時刻または無限時刻で爆発する初期値が存在する．

問題 $(\mathrm{KS})_\varepsilon$ と問題 (KS) の先行研究を比べると，$q > m + \frac{2}{N}$ のときの解の挙動に差異が生じている．具体的には，問題 (KS) は解が爆発する時刻が有限または無限であるのに対し，問題 $(\mathrm{KS})_\varepsilon$ は解が爆発する時刻が有限であると特定できているのである．本研究の目的は，この先行研究の差異を失くすことである．すなわち，$q > m + \frac{2}{N}$ のとき，問題 (KS) の解が有限時刻で爆発するような初期値の存在を示す．

2.2. 主定理とその証明の概略

本研究の主定理を述べる．

主定理 ([5] H.–Ishida–Yokota (2018))

$N \geq 2$, $m \geq 1$, $q \geq 2$ とし，これらは
$$q > m + \frac{2}{N}$$
を満たすとする．このとき，すべての $M > 0$, $A > 0$ に対して，次を満たす定数 $T(M,A) > 0$, $K(M,A) > 0$ が存在する:
すべての
$$\begin{aligned}(u_0, v_0) \in &\mathcal{B}(M,A)\\ &:= \Biggl\{ (u_0,v_0) \in L^\infty(\Omega) \times W^{1,\infty}(\Omega) \;\Bigg|\; \nabla u_0^m \in L^2(\Omega),\ G(u_0) \in L^1(\Omega),\\ &\qquad u_0, v_0 \text{ は球対称かつ非負値}, \int_\Omega u_0 = M, \|v_0\|_{W^{1,2}(\Omega)} \leq A, \mathcal{F}(u_0,v_0) \leq -K(M,A) \Biggr\}\end{aligned}$$
に対して，これを初期値とする問題 (KS) の解の最大存在時刻 $T_{\max}$ は $T_{\max} \leq T(M,A)$ を満たし，u は $T_{\max}$ で爆発する．ただし，
$$G(u_0) := \int_{s_0}^{u_0} \int_{s_0}^{\sigma} m\tau^{m-q}\, d\tau d\sigma \quad (s_0 > 1),$$
$$\mathcal{F}(u_0,v_0) := \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v_0|^2 + \frac{1}{2}\int_\Omega v_0^2 - \int_\Omega u_0 v_0 + \int_\Omega G(u_0),$$
である．

注記 2.1. 任意の $M>0$ に対し，初期値の集合 $\mathcal{B}(M,A)$ が空集合にならないような $A>0$ の存在は保証されている [**5**, Remark 1.1].

以下，微分と積分の記号として，多変数関数 $u(x,t)$ について次のように表す:

$$\int_\Omega u = \int_\Omega u(x,t)\,dx,\ \nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1},...,\frac{\partial u}{\partial x_N}\right),\ \Delta u = \sum_{i=1}^N \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}.$$

ここで注意しなければならないのは ∇u はベクトルであるという点である．よって $\int_\Omega \nabla u$ はベクトルで，$\int_\Omega |\nabla u|$ はスカラーである[*1]．また，$u(t)$ と表せば，u を t の 1 変数関数とみなした表記であり，特に u を x で積分したものは t の関数であるので，分かりやすくするためそのように表すことがある．

問題 (KS) の解 u の性質として最も特徴的なものは，第一式を x について Ω 上積分することで得られる等式

$$\int_\Omega u(x,t)\,dx = \int_\Omega u_0(x)\,dx = (\text{ 定数 }),\quad t>0$$

が成り立つことである．これを u の L^1 **保存則** (mass conservation) といい，この値を M とおく．生物学的観点からいえば，この等式は領域 Ω における生物の個数が変化しないことを表している．

問題 (KS) の解の存在についてはすでに知られているが，その解が時間 t を大きくしたときでも存在するかは不明である．ここで，解が存在する限界の時刻 (解の最大存在時刻) $T_{\max}$ を考え，それよりも手前の時刻 T までの範囲 $[0,T)$ における解がどのような関係を満たすかを解析する．[**11**] では，次のようなことが示されている:
問題 (KS) の解について，次のうちどちらか一方が必ず成り立つ．

- $T_{\max}=\infty$.
- $T_{\max}<\infty$ のとき，解は $T_{\max}$ で爆発する．

したがって，$T_{\max}<\infty$ であることを示せば，本研究の目的が達成できることになる．[**22, 2, 3**] における発想は，**変数 t に関する常微分不等式を導出すること**である．具体的に述べると，問題 (KS) の解 (u,v) が満たすべき関係式 (すべて (KS) の方程式から得られる) から，

$$\frac{d}{dt}L(t) \geq k\cdot[L(t)]^p \quad (p>1)$$

という形をした，ある関数 $L(t)$ の常微分不等式を導く．これより，主定理の結論が導けるが，詳しくは後に述べる．[**22, 2, 3**] によると，問題 (KS) における関数 $L(t)$ は，次のように定義されるものであることが

[*1] $x=(x_1,..,x_N)$ に対し，$|x|=\sqrt{x_1^2+\cdots+x_N^2}$ (Euclid (ユークリッド) ノルム) である．

予想される:

$$
\begin{aligned}
&L(t) := \int_0^t (-\mathcal{F}(u(s), v(s)))^p \, ds - \mathcal{F}(u_0, v_0), \\
&\mathcal{F}(u,v) := \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v|^2 + \frac{1}{2}\int_\Omega v^2 - \int_\Omega uv + \int_\Omega G(u), \qquad (2.1)\\
&G(u) := \lim_{\delta\to 0}\int_{s_0}^{u}\int_{s_0}^{\sigma} \frac{m\tau^{m-1}}{\tau^{q-1}+\delta}\, d\tau d\sigma. \qquad (2.2)
\end{aligned}
$$

(2.1) で定義される関数 $\mathcal{F}$ は問題 (KS) の **Lyapunov (リャプノフ) 関数**[*1]と呼ばれ，(u, v) が問題 (KS) の解のとき，t について単調減少の関数となる．ここで，Lyapunov 関数は (u, v) が問題 (KS) の解のとき，u, v で表されたある関数 f, g を用いて，次のように表現できる (cf. [**11**]):

$$
\mathcal{F}(u(t), v(t)) + \int_0^t (\|f(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|g(s)\|_{L^2(\Omega)}^2)\, ds = \mathcal{F}(u_0, v_0), \quad t > 0. \qquad (2.3)
$$

本研究では，キーの評価として次の命題を示すことを目標とする．

命題 2.1. $N \geq 2,\ m \geq 1,\ q \geq 2$ が $q > m + \frac{2}{N}$ を満たすとする．(u, v) を問題 (KS) の解とするとき，次を満たす定数 $\theta \in (\frac{1}{2}, 1), C = C(M, A) > 0$ が存在する：

$$
\mathcal{F}(u(t), v(t)) \geq -C \cdot \left(\|f(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|g(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + 1\right)^\theta, \quad t \in [0, T).
$$

この命題を示すために，次の 3 つの補題を示す．証明については [**5**] を参照されたい．

補題 2.2. (u, v) を問題 (KS) の解，$\varepsilon > 0$ を任意の定数とするとき，次を満たす定数 $C = C(\varepsilon, A) > 0$ が存在する：

$$
\int_\Omega uv \leq (1+\varepsilon)\int_\Omega |\nabla v|^2 + C \cdot \left(\|f\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{2N+4}{N+4}} + 1\right).
$$

補題 2.3. (u, v) を問題 (KS) の球対称[*2] 解，$\varepsilon > 0$ を任意の定数とするとき，次を満たす定数 $C = C(\varepsilon, M, A) > 0$ が存在する：

すべての $r_0 \in (0, \min\{1, R\})$ に対して

$$
\int_{\Omega\setminus B_{r_0}} |\nabla v|^2 \leq \varepsilon\int_\Omega uv + \varepsilon\int_\Omega |\nabla v|^2 + C \cdot \left(\|f\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{2N+4}{N+4}} + 1\right)
$$

を満たす．

補題 2.4. $N \geq 2,\ m \geq 1,\ q \geq 2$ が $q > m + \frac{2}{N}$ を満たすとする．(u, v) を問題 (KS) の球対称解とするとき，次を満たす定数 $\mu \in [0, 2), C = C(M) > 0$ が存在する：

すべての $r_0 \in (0, \min\{1, R\})$ に対して

$$
\int_{B_{r_0}} |\nabla v|^2 \leq \mu\int_\Omega G(u) + C \cdot \left(r_0\|f\|_{L^2(\Omega)}^2 + r_0\|g\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|v\|_{L^2(\Omega)}^2 + 1\right) \qquad (2.4)
$$

を満たす．ここで，$G(u)$ は (2.2) で定められたものである．

---

*1 論文によっては Liapunov (リアプノフ) 関数と表記する場合もある．

*2 関数 u が球対称であるとは，$u(x) = u(|x|)$ と表せることをいう．初期値 (u_0, v_0) が球対称ならば，問題 (KS) の解 (u, v) も球対称であることが知られている [**11**].

本研究で最も困難な部分が補題 2.4 の証明である．(2.4) は，半径 R の球 Ω の内部である，半径 r_0 の球 B_{r_0} における評価である．[**2, 3**] では，問題 (KS) の第一式を

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nabla \cdot (\nabla (u+\varepsilon)^m - (u+\varepsilon)^{q-2} u \nabla v) \quad (\varepsilon > 0)$$

に置き換えた問題 $(\mathrm{KS})_\varepsilon$ を扱っている．(2.4) に相当する評価を導くために，次のような評価を行う必要がある:

$$\int_{B_{r_0}} u|\nabla v| \le \int_\Omega \frac{u}{(u+\varepsilon)^{q-2}} + (\text{ 評価できる項 }),$$
$$\int_\Omega \frac{u}{(u+\varepsilon)^{q-2}} \le \frac{1}{\varepsilon^{q-2}} \int_\Omega u = \frac{M}{\varepsilon^{q-2}} = (\text{ 定数 }).$$

しかし，問題 (KS) については $\varepsilon = 0$ が対応しているため，同様に評価することができない．なぜなら，$q > 2$ のとき $\frac{M}{\varepsilon^{q-2}}$ は $\varepsilon \to +0$ のときに正の無限大へ発散してしまうからである．この難点を解消するために，$u = s_0$ を境に積分範囲を分けて，

$$u \ge s_0 \Longrightarrow u^{3-q} \le s_0^{2-q} \cdot u, \quad u \le s_0 \Longrightarrow u|\nabla v| \le s_0 \cdot |\nabla v|$$

と各点評価し，

$$\begin{aligned}
\int_{B_{r_0}} u|\nabla v| &= \int_{\{u \ge s_0\}} u|\nabla v| + \int_{\{u \le s_0\}} u|\nabla v| \\
&\le \int_{\{u \ge s_0\}} u^{3-q} + (\text{ 評価できる項 }) + s_0 \int_{\{u \le s_0\}} |\nabla v| \\
&\le s_0^{2-q} \int_\Omega u + s_0 \int_{B_{r_0}} |\nabla v| + (\text{ 評価できる項 }) \\
&\le \int_{B_{r_0}} |\nabla v|^2 + (\text{ 定数 }) + (\text{ 評価できる項 })
\end{aligned}$$

とすることで評価した (詳しくは [**5**, Lemma 3.5, 3.7] 参照のこと)．この評価方法はまったく新しいものであり，この評価を利用することで [**2, 3**] に適用できるパターンが増えることもわかる．以上の補題 2.2, 2.3, 2.4 を組み合わせることで，命題 2.1 を示すことができる (詳しくは [**5**, Proposition 3.1] を参照のこと)．

いよいよ，主定理の証明をする．

主定理の証明． 命題 2.1 より，ある定数 $C > 0, \theta \in (\frac{1}{2}, 1)$ があって，

$$\mathcal{F}(u(t), v(t)) \ge -C \cdot \left(\|f(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|g(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + 1 \right)^\theta, \quad t > 0 \tag{2.5}$$

を満たす．また，

$$-\mathcal{F}(u_0, v_0) \ge 2^\theta C \tag{2.6}$$

と仮定する．すなわち， 定理の主張において $K(M, A) = 2^\theta C$ とおく．ここで，(2.3) より $\mathcal{F}$ が単調減少であることがわかるので，

$$-\mathcal{F}(u(t), v(t)) \ge -\mathcal{F}(u_0, v_0) \ge 2^\theta C > 0, \ t > 0 \tag{2.7}$$

が成り立つ．また，

$$L(t) := \int_0^t (-\mathcal{F}(u(s), v(s)))^{\frac{1}{\theta}}\, ds - \mathcal{F}(u_0, v_0)$$

とおく．このとき，(2.5) より，

$$\begin{aligned}\int_0^t (\|f(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|g(s)\|_{L^2(\Omega)}^2)\, ds &\geq \int_0^t \left[\frac{1}{C^{\frac{1}{\theta}}}(-\mathcal{F}(u(s), v(s)))^{\frac{1}{\theta}} - 1\right] ds \\ &= \frac{1}{2C^{\frac{1}{\theta}}}\int_0^t (-\mathcal{F}(u(s), v(s)))^{\frac{1}{\theta}}\, ds + \int_0^t \left[\frac{(-\mathcal{F}(u(s), v(s)))^{\frac{1}{\theta}}}{2C^{\frac{1}{\theta}}} - 1\right] ds.\end{aligned}$$

また，(2.6), (2.7) より，

$$\begin{aligned}\int_0^t (\|f(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|g(s)\|_{L^2(\Omega)}^2)\, ds \geq &\frac{1}{2C^{\frac{1}{\theta}}}\int_0^t (-\mathcal{F}(u(s), v(s)))^{\frac{1}{\theta}}\, ds \\ &+ \int_0^t \left[\left(\frac{-\mathcal{F}(u(s), v(s))}{-\mathcal{F}(u_0, v_0)}\right)^{\frac{1}{\theta}} - 1\right] ds \\ \geq &\frac{1}{2C^{\frac{1}{\theta}}}\int_0^t (-\mathcal{F}(u(s), v(s)))^{\frac{1}{\theta}}\, ds\end{aligned}$$

が成り立つ．一方，(2.3) より，

$$\begin{aligned}\left(\frac{d}{dt}L(t)\right)^{\theta} = -\mathcal{F}(u(t), v(t)) = &\int_0^t (\|f(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|g(s)\|_{L^2(\Omega)}^2)\, ds - \mathcal{F}(u_0, v_0) \\ \geq &\frac{1}{2C^{\frac{1}{\theta}}}\int_0^t (-\mathcal{F}(u(s), v(s)))^{\frac{1}{\theta}}\, ds - \mathcal{F}(u_0, v_0) \\ \geq &\min\left\{1, \frac{1}{2C^{\frac{1}{\theta}}}\right\} L(t) =: \delta_0 L(t).\end{aligned}$$

ここで，$p := \frac{1}{\theta} > 1,\ k := \delta_0^{\frac{1}{\theta}} > 0$ とおくと，

$$L'(t) \geq k(L(t))^p$$

を満たす．ここで，

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(L(t))^{1-p} &= (1-p)(L(t))^{-p}L'(t) \\ &\leq -k(p-1)\end{aligned}$$

を満たし，この両辺を 0 から t まで積分すると，

$$(L(t))^{1-p} - (L(0))^{1-p} \leq -k(p-1)t$$

となり，これを $L(t)$ について解くと，

$$L(t) \geq \frac{L(0)}{\{1 - k(p-1)(L(0))^{p-1}t\}^{\frac{1}{p-1}}}.$$

ここで，$t \to \frac{1}{k(p-1)(L(0))^{p-1}} - 0$ のとき，(右辺)$\to \infty$ であることから，$L(t) \to \infty$ が成り立つ．問題 (KS) の解 (u, v) が存在すれば，関数 $L(t)$ も存在する．この対偶をとり，関数 $L(t)$ が $t \geq \frac{1}{k(p-1)(L(0))^{p-1}}$ で存在しなければ，問題 (KS) の解もその範囲では存在しない．関数 $L(t)$ が連続関数であることに注意すると，$T_{\max} \leq \frac{1}{k(p-1)(L(0))^{p-1}} < \infty$ が成り立つ．よって，主定理が示された．　□

さいごに

本研究を始める際，まずは先行研究との比較をした．自分が扱っている問題 (KS) と類似した問題 $(\mathrm{KS})_\varepsilon$ とを比べ，それらへの研究結果の差異を埋めることをこの研究の目的とした．問題 (KS) のような Keller–Segel 系と呼ばれる走化性方程式においては，代表的な研究の道具として L^1 保存則と Lyapunov 関数の二つがある．解の挙動を明らかにするためには，この二つはなくてはならないものである．それだけでなく，Sobolev 空間に属する関数の性質や，様々な不等式を用いてこの主定理が完成したことを明記しておきたい．また，この研究の続きとして，解の爆発点の特定，爆発解の形状，爆発解を与える初期値の集合の性質などを研究し，もう一つの論文 [**4**] にまとめることができた．

今回のような偏微分方程式の解についての研究は，科学的な現象からある程度どのような結果になるかを予想することができる．よく「期待」という言い方をするが，この期待されたことを実際に真であると証明することこそが，数学の研究の本質だと考える．自然に考えると，差異が生じていることが疑問であり，差異がないことが当たり前だと考えるだろう．もっと言えば，差異がなくなったとたん，本研究の価値が薄れるように考えられなくもない．しかし，統一的な結果こそが，数学的な美しさを表しているようにも見える．本研究では，特に補題 2.4 の証明に苦労した．上記にあるように，評価できない項が出てきてしまったことに難点を感じた．とくに u の指数が，$q > 3$ のときに負になってしまうことが一番の難点であった．しばらくは，$2 \leq q \leq 3$ に限った結果として論文を仕上げてしまうのか，という葛藤があった．この難点をクリアしたのは，取り組み始めて 1 年弱が経過した頃 (2017 年 5 月頃) のことであった．筆者は数学の研究の闇を見て，ここで数学者になることを諦めたわけだが，これでも早く解決した方であろう．

今回拙稿ながら本論文を掲載する機会を与えていただいた國學院高校の教職員方に心より感謝したい．また，本研究は横田智巳氏 (東京理科大学 教授) , 石田祥子氏 (千葉大学 特任助教) との共同研究である．お二方には，数学的な厳密な議論だけでなく，論文の執筆，第 43 回発展方程式研究会等のセミナーの講演の練習やそこで使うスライドの添削など，様々な面で暖かいサポートをいただいた．そして，断る形になってしまったが，本研究を大いに評価していただき，ポーランドへの留学を提案してくださった Tomasz Cieślak 氏 (Polish Academy of Sciences) には，神楽坂解析セミナーにおいて私のつたない英語の講演を聞いていただいた．研究室の先輩，同期，後輩をはじめ，研究の支えになっていただいた方々に心より感謝申し上げる．

最後になりましたが，拙稿ながら査読していただいた院生時代の先輩である水上雅昭氏 (東京理科大学 助教授) には重ねて感謝申し上げたい．

参考文献

[1] X. Cao, *Global bounded solutions of the higher-dimensional Keller–Segel system under smallness conditions in optimal spaces*, Discrete Contin. Dyn. Syst., **35** (2015), 1891–1904.

[2] T. Cieślak, C. Stinner, *Finite-time blowup and global-in-time unbounded solutions to a parabolic–parabolic quasilinear Keller–Segel system in higher dimensions*, J. Differential Equations, **252** (2012), 5832–5851.

[3] T. Cieślak, C. Stinner, *Finite-time blowup in a supercritical quasilinear parabolic–parabolic Keller–Segel system in dimension 2*, Acta Appl. Math., **129** (2014), 135–146.

[4] T. Hashira, *Properties of blow-up solutions and their initial data for quasilinear degenerate Keller–Segel systems of parabolic–parabolic type*, J. Math. Anal. Appl., **468** (2018), 585–607.

[5] T. Hashira, S. Ishida, T. Yokota, *Finite-time blow-up for quasilinear degenerate Keller–Segel system of parabolic–parabolic type*, J. Differential Equations, **264** (2018), 6459–6485.

[6] M. A. Herrero, J. J. L. Velázquez, *A blow-up mechanism for a chemotaxis model*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci., **24** (1997), 633–683

[7] T. Hillen, K. J. Painter, *A user's guide to PDE models for chemotaxis*, J. Math. Biol., **58** (2009), 183–217.

[8] D. Horstmann, G. Wang, *Blow-up in a chemotaxis model without symmetry assumptions*, European J. Appl. Math., **12** (2001), 159–177.

[9] S. Ishida, K. Seki, T. Yokota, *Boundedness in quasilinear Keller–Segel systems of parabolic–parabolic type on non-convex bounded domains*, J. Differential Equations, **256** (2014), 2993–3010.

[10] S. Ishida, T. Yokota, *Global existence of weak solutions to quasilinear degenerate Keller–Segel systems of parabolic–parabolic type*, J. Differential Equations, **252** (2012), 1421–1440.

[11] S. Ishida, T. Yokota, *Blow-up in finite or infinite time for quasilinear degenerate Keller–Segel systems of parabolic–parabolic type*, Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B, **18** (2013), 2569–2596.

[12] S. Ishida, T. Yokota, *Boundedness in a quasilinear fully parabolic Keller–Segel system via maximal Sobolev regularity*, Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. S, **13** (2020), 211–232.

[13] E. F. Keller, L. A. Segel, *Initiation of slime mold aggregation viewed as an instability*, J. Theor. Biol., **26** (1970), 399–415.

[14] 俣野 博, 河野 俊丈 他, 「数学 II」, 東京書籍 (2011).

[15] Y. Mimura, *The variational formulation of the fully parabolic Keller–Segel system with degenerate diffusion*, J. Differential Equations, **263** (2017), 1477–1521.

[16] N. Mizoguchi, M. Winkler, *Blow-up in the two-dimensional parabolic Keller–Segel system*, preprint.

[17] T. Nagai, T. Ogawa, *Brezis–Merle inequalities and application to the global existence of the Cauchy problem of the Keller–Segel system*, Commun. Contemp. Math., **13** (2011), 795–812.

[18] T. Nagai, T. Senba, K. Yoshida, *Application of the Trudinger–Moser inequality to a parabolic system of chemotaxis*, Funkcial. Ekvac., **40** (1997), 411–433.

[19] K. Osaki, A. Yagi, *Finite dimentional attractors for one-dimentional Keller–Segel equations*, Funkcial. Ekvac., **44** (2001), 441–469.

[20] T. Senba, T. Suzuki, *A quasi-linear parabolic system of chemotaxis*, Abstr. Appl. Anal., 2006.

[21] Y. Tao, M. Winkler, *Boundedness in a quasilinear parabolic–parabolic Keller–Segel system with subcritical sensitivity*, J. Differential Equations, **252** (2012), 692–715.

[22] M. Winkler, *Finite-time blow-up in the higher-dimensional parabolic–parabolic Keller–Segel system*, J. Math. Pures Appl., **100** (2013), 748–767.